



TITLE:

生物モデルと反応拡散系(強い相関をもつゆらぎの統計物理学(第2回),科研費研究会報告)

AUTHOR(S):

三村, 昌泰

CITATION:

三村, 昌泰. 生物モデルと反応拡散系(強い相関をもつゆらぎの統計物理学(第2回),科研費研究会報告). 物性研究 1984, 42(5): 26-28

ISSUE DATE:

1984-08-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/91399>

RIGHT:

生物モデルと反応拡散系

三村昌幸(広大・理)

ある生態系のもっとも、捕食-被捕食、競争、共生等の相互作用をしながら生存する多くの種の個体群がとる空間パターンは自然界においてしばしば見られる。これらの構造および機構を理論的に理解するために、モデル方程式として反応拡散系が用いられている。例えば、プラントンの斑状分布(木の茸、赤潮)の出現の要因の一つの理解手段として Turing の拡散不安定性の概念が登場している、つまり、動物および植物プラントンの捕食、被捕食者の関係にあること、言い換えれば、前者は inhibitor、後者は activator の役割をしていること (May (1973))、動物プラントンの分散が植物プラントンのそれよりずっと速いこと (Okubo (1980)) の2つの要因からパターン形成を行うことは現在では周知のことである。(Segel-Jackson (1972), Mimura-Nishiura-Yamaguti (1979))。

一方、生態系の中では、競争しながら棲み分けパターンを形成することによって生存する個体群もある。このような競争パターン形成も反応拡散系を用いて接近しようという試みはいくつか行われているが、捕食、被捕食者へのパターン形成の理解として Turing の考えのようなシャープな考えが適用されないために、パターン形成解析はそれほど進んでいなかった。先ずその理由を2種競争系を用いて示そう。

(Lotka-Volterra-Gause 系)

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = (r_1 - a_{11}u_1 - a_{12}u_2)u_1 \equiv f(u_1, u_2)u_1 \\ \frac{du_2}{dt} = (r_2 - a_{21}u_1 - a_{22}u_2)u_2 \equiv g(u_1, u_2)u_2 \end{cases} \quad t > 0$$

ここで r_i, a_{ij} ($i, j=1, 2$) はすべて正定数であり、 r_i は u_i の本来の増殖係数、 a_{ii} は u_i の種内競争係数、 a_{ij} は u_j から u_i への種間競争係数である。このことから u_1 と u_2 はお互いに inhibitor の役割をしていることがわかる。(Turing の拡散不安定性のカテゴリーにははまらない)。 (1) の解は次の4つの場合に分類される:

(I) $(a_{12}/a_{22} < r_1/r_2 < a_{11}/a_{21})$: 初期値 $(u_1(0), u_2(0))$ がともに正であれば、正の平衡解 (\bar{u}_1, \bar{u}_2) ($f(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = g(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$) は大域的に漸近安定である。

(II) $(a_{12}/a_{22}, a_{11}/a_{21} < r_1/r_2)$: $u_1(0)$ が正であれば, 平衡解 $(r_1/a_{11}, 0)$ が大域的に漸近安定である.

(III) $(a_{11}/a_{21} < r_1/r_2 < a_{12}/a_{22})$: 安定な平衡解が $(r_1/a_{11}, 0), (0, r_2/a_{22})$ と2つあり, 双安定系となる.

(IV) $(r_1/r_2 < a_{12}/a_{22}, a_{11}/a_{22})$: $u_2(0)$ が正であれば, 平衡解 $(0, r_2/a_{22})$ が大域的に漸近安定である.

(1) の拡散モデルを考えよう.

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \Delta u_1 + f(u_1, u_2) u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \Delta u_2 + g(u_1, u_2) u_2 \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^N,$$

ここで, $d_i (i=1, 2)$ は正定数, $\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. (2) の境界条件として

$$(3) \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial D.$$

を課す. n は ∂D 上の点 x の外向法線ベクトル. 競合拡散系 (2), (3) に対しては次の結果が知られている.

(i) (I), (II), (IV) の場合には空間平均一定定常解は存在しない (Hsu (1982)).

(ii) (III) の場合には空間平均一定定常解は存在するが, 領域 D が凸形状の場合に必要である (Kishimoto-Weinberger (1983)).

(iii) (2), (3) には周期解が存在する可能性があるが, それらは必要である. (Matano (1983)).

以上のことから, 競合拡散系は, 領域が凸形状のとき (例えば, 空間一次元) にはパターン形成が起こらない. これは inhibitor-inhibitor 系から予想した通りである. (しかしながら, 最近, D の形状が凸からはずれる複雑な凹形状の場合には, (III) (つまり, ダイナミクスが双安定である場合) の条件のもとで, 標々分岐パターンを示す安定な定常解が存在することが示された (Matano-Mimura (1983)). このように競合系がパターン形成を行うには領域の形が重要であることがわかった.

一斉, (2) に対して, 移動効果として, 拡散のかわりに, 個体群伝播効果を導入したモデル

ルが提出された (Shigesada et al. (1979)). この系は

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta [(d_1 + d_{12} u_2) u_1] + f(u_1, u_2) u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta [(d_2 + d_{21} u_1) u_2] + g(u_1, u_2) u_2 \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in D$$

ここで境界条件は (3) と同じとする. d_{ij} は正定数であり, u_j から u_i へ 分散効果も高める 群居係数である. $d_{ij} \equiv 0$ のときには (4) は (2) にはかならない. (4) はもはや線形拡散でなく, 移流を伴う非線形拡散系である. この理由のために安定な模式分岐パターンが現われることが示される. 例えば, (I) の場合には, d_{ij} -不安定性現象が起り, パターンが現われる (Mimura-Kawasaki (1980)). これは Turing の拡散不安定性の非線形版と見られる. 一方, (II), (IV) の場合には, d_1/d_2 が非常に大きい, あるいは小さい場合, 特異擾動論によつてパターンが現われる (Mimura et al. (1984)). そうしん以上の結果は D が凸形状の場合で起ることを注意しておく必要がある.

このように, inhibitor 系である競合拡散系のパターン形成には線形拡散とダイミクス
の2つの要因のバランスでパターン形成する activator-inhibitor 系とはいさゝか異なり,
もう一つの要因 (例えば, 領域の形状, 非線形移流-拡散) との3つのバランスによ
つてパターン形成を行う. この事が inhibitor 系のパターン形成の解析をいさゝか困難
にしている理由である. しかしながら, このような系は生態学のみならず, 神経回路,
生理学等に現われているので, 更に詳しい研究が必要と思われる.

References:

- R. M. May (1973) Stability and complexity in model ecosystems (monogr. in Pop. Biol. 6), Princeton Univ. press.
- A. Okubo (1980) Diffusion and ecological problems: Mathematical models, Biomath, 10, Springer-Verlag, Berlin.
- L. A. Segel and J. L. Jackson (1972) J. Theor. Biol., 37, 545-559.
- M. Mimura, Y. Nishiura and M. Yamaguti (1979) Ann. N. Y. Acad. Sci. 316, 490-510.
- S. B. Hsu (1983) On general two-species competition model with diffusion, manuscript
- K. Kishimoto and H. Weinberger (1983) J. Differential Equations, in pressed.
- H. Matano (1983) Existence of Nontrivial unstable sets for equilibriums of strongly order-preserving systems, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.
- H. Matano and M. Mimura (1983) Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 19, 1049-1079.
- N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto (1979) J. Theor. Biol., 79, 89-99.
- M. Mimura and K. Kawasaki (1980) J. Math. Biol. 9, 49-64.
- M. Mimura, Y. Nishiura, A. Tesei and T. Tsujikawa (1984) Coexistence problems of two competing species models with density-dependent diffusion, to appear in Hiroshima Math. J.